Olympiade Francophone de Mathématiques

Sixième édition

22 mars 2025

Épreuve Senior

Les problèmes *ne* sont *pas* classés par ordre de difficulté

Problème 1. Soit $a_1, a_2, \dots$ une suite d'entiers strictement positifs vérifiant la propriété suivante : pour tous entiers strictement positifs $k < \ell$, pour tous entiers $m_1, \dots, m_k$ distincts et pour tous entiers $n_1, \dots, n_\ell$ distincts,

$$a_{m_1} + \ldots + a_{m_k} \leqslant a_{n_1} + \ldots + a_{n_\ell}.$$

Montrer qu'il existe deux entiers N et b tels que, pour tout $n \geqslant N$, $a_n = b$.

Problème 2. Soit $n \geqslant 2$ un entier. On considère une grille carrée de taille $2n \times 2n$ et découpée en $4n^2$ carrés unités. La grille est dite *équilibrée* si :

- Chaque case contient un nombre valant $-1, 0$ ou 1.
- La valeur absolue de la somme des nombres de la grille ne dépasse pas $4n$.

Déterminer, en fonction de n, le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que toute grille équilibrée contient toujours un carré de taille $n \times n$ dont la valeur absolue de la somme des n^2 cases est inférieure ou égale à k.

Problème 3. Soit ω un cercle de centre O. Soient B et C deux points fixes du cercle ω et soit A un point variable sur le cercle ω. On note X le point d'intersection des droites (OB) et (AC) et on suppose que $X \neq O$. On note Ω le cercle circonscrit au triangle AOX. Soit Y le second point d'intersection de Ω avec ω. La tangente à Ω en Y recoupe ω en I. La droite (OI) recoupe ω en J. La médiatrice du segment $[OY]$ recoupe la droite (YI) en T et la droite (AJ) recoupe Ω en P. On note Z le second point d'intersection du cercle circonscrit au triangle PYT avec ω.

Montrer que, lorsque le point A varie, les points Y et Z restent fixes.

Problème 4. Déterminer toutes les suites d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \dots$ vérifiant les deux conditions suivantes :

- il existe un entier $M > 0$ tel que, pour tout indice $n \geqslant 1$, $0 < a_n \leqslant M$;
- pour tout nombre premier p et pour tout indice $n \geqslant 1$, le nombre

$$a_n a_{n+1} \ldots a_{n+p-1} - a_{n+p}$$

est un multiple de p.

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes

Chaque problème est noté sur 7 points